Шифр:

В-21

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2018/2019
Ленинградская область

Район Сосновый Бор

Школа МБОУ „Лицей №8"

Класс 10 „Б"

ФИО Закутей Егор Игорев

Чистовик

В-21

лист 1

1	2	3	4	5	Σ
7	5	7	7	X	26

(10.1) Рыцарем не может быть человек, который сказал, что его число больше 10, т.к. если бы он оба раза сказал правду его число было бы одновременно больше 10 и одновременно меньше 10 (второе высказывание)

Максимально рыцарей может быть 9 (шт.), приведу пример: (x - загаданное число.)

N	рыцарь/лжец	X	1 высказ.	2 высказ
1	Р	1,5	$1<x$	$x<2$
2	Р	2,5	$x>2$	$x<3$
3	Р	3,5	$x>3$	$x<4$
4	Р	4,5	$x>4$	$x<5$
5	Р	5,5	$x>5$	$x<6$
6	Р	6,5	$x>6$	$x<7$
7	Р	7,5	$x>7$	$x<8$
8	Р	8,5	$x>8$	$x<9$
9	Р	9,5	$x>9$	$x<10$
10	Л	5	$x>10$	$x<1$

Ответ: 9 рыцарей.

(10.2)

$p=10^{100}$, p - периметр.

~~Рассмотрим 2 случ~~ Рассмотрим сторону a: (a - длина стор.), сумма длин всех остальных сторон это $(p-a)$

По условию $(p-a)\vdots a$ т.е. $(p-a)=a\cdot d$, $d\in\mathbb{Z}$

$p=(d+1)a \Rightarrow p\vdots a$ т.е. периметр делится на каждую из сторон нацело.

Рассмотрим два случая: 1) каждая сторона равна $\frac{p}{4}$.

Этот случай нам подходит т.к. $\frac{p}{4}$ - целое $\left(\frac{p}{4}=2^{98}\cdot 5^{100}\right)$ и многоугольник действительно выпуклый т.к. это ромб со стороной $\frac{p}{4}$.

2) Длины сторон различны: (хотя одна отличается от другой).
Тогда одна из сторон ~~точно~~ ~~равна~~ больше $\frac{P}{4}$.
~~Ха~~ Но сторона должна быть делителем P.
Делители P, которые больше $\frac{P}{4}$:

$\frac{P}{3}$ $\frac{P}{2}$ и P. Заметим, что при ~~одн~~ одной ~~сто~~ из сторон $\left(\frac{P}{2}\right)$ (отрезок) наш четырёхугольник будет вырожденным и уж точно не выпуклым. При одной из сторон равной P четырехугольника вообще не может существовать.

$\Rightarrow$ остаётся лишь один случай, когда все стороны равны $\frac{P}{4}$ и четырёхугольник – ромб. ЧТД

10.3 Рассмотрим случай, когда в таблице есть хоть одно иррац. число. Составим цепочку следующим образом:
Смотрим где находится в первой строке иррац. число a_1, смотрим, какое число a_2 находится под ним в столбце. Далее повторяем ~~мы~~ ем то же самое для a_2:
Смотрим, где находится в 1 строке a_2 и смотрим, какое число a_3 находится под ним. Продолжаем так, пока не вернёмся к числу a_1 (кол-во чисел в таблице конечно и ни одно не находится в столбце с собой, поэтому мы точно вернёмся к числу a_1)

a_1 – иррац, ~~так~~, т.к. $a_1 + a_2 = t$, t ~~делител~~ рац. число по усл
a_2 – тоже иррац. (иррац + рац. = иррац.)
Аналогично доказываем, что все числа в цепочке $a_1, a_2 \ldots a_n$ иррациональны. Докажем, что цепочек, в которую входит нечётное кол-во иррац. чисел быть не может.
По усл.:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= t_1 \quad (1) \\ a_2 + a_3 &= t_2 \quad (2) \\ a_3 + a_4 &= t_3 \quad (3) \\ &\ldots \\ a_n + a_1 &= t_n \quad (n) \end{aligned}$$

(по усл. из столбцов $t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$ – рациональные числа)

~~Запишем выр-е~~ обе части ур-е ~~выражения~~ ~~Сло~~ ~~Буд~~ Будем складывать и вычитать так:

(Чистовик)

В-21
Лист 2

$(1)-(2)+(3)-\ldots+(n)$ т.к. n-нечётн его выписываем со знаком (+)

Результат сложения:

$a_1+a_2-a_2-a_3+a_3+a_4-\ldots+a_n+a_1=t_1-t_2+t_3-\ldots+t_n$

$\cancel{a_1+a_2}=\quad 2a_1=t_1-t_2+t_3-\ldots+t_n$

рациональное число

Тогда и a_1 рациональное и мы приходим к противоречию

Будем смотреть цепочки так, пока все иррац. числа ~~не войдут~~ нам не встретятся.

Тогда N-кол-во иррац чисел в 1 строке это сумма количеств чисел в каждой цепочке. N-чётное т.к. количеств чисел в каждой цепочке чётно.

Т.к. 2019 нечётн $N\neq 2019$

Если $N=2018$, то только одно число рационально и должно встать в столбик под собой же, что противоречит условию.

Тогда если N-четно и $N<2018$, $N=2016$ и можно привести пример:

← номера столбцов

	1	2	3	4	5	...	$2n-1$	$2n$	...	2017	2018	2019
1	$1+\sqrt2$	$1-\sqrt2$	$2+\sqrt2$	$2-\sqrt2$	$3+\sqrt2$	...	$n+\sqrt2$	$n-\sqrt2$		1	2	3
1	$1-\sqrt2$	$1+\sqrt2$	$2-\sqrt2$	$2+\sqrt2$	$3-\sqrt2$	...	$n-\sqrt2$	$n+\sqrt2$		2	3	1

↑ номера строк

Ответ: 2016 иррациональных чисел.

(10.4) Рассмотрим $P_n(t)$, где $t=x^2$, $t\geq 0$

$P_n(t)=x^t+a_1x^{t-1}+\ldots+a_n$

x_1-наименьший корень многочлена $P_n(x)$, t_1-наибольший корень многочлена $P_n(t)$. $x_1=-\sqrt{t_1}$ т.к. $x^2=t$, $x=\pm\sqrt t$

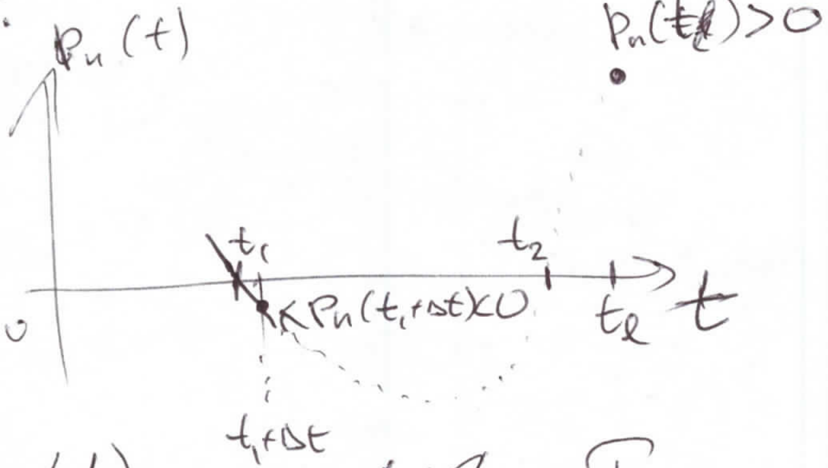
Докажем, что в точке t_1 $P_n'(t_1)\geq 0$.

Пойдем от противного:

Если $P_n'(t_1) < 0$ в точке $t_1 + \Delta t$ $P_n(t_1+\Delta t)<0$ т.к. $P(t_1)=0$,

Но причём $\lim\limits_{t \to +\infty} P_n(t) = +\infty$ и есть точка $t_\ell : t_\ell > t_1$, $P_n(t_\ell)>0$

=> т.к. $P_n(t)$ непрерывна на $[0;\infty)$ график пересечёт ось Ot ещё раз и будет ещё один корень больше t_1:

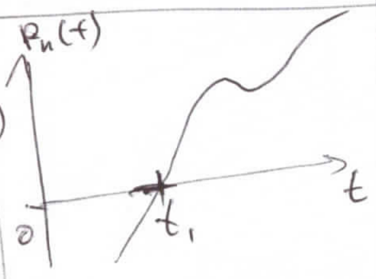
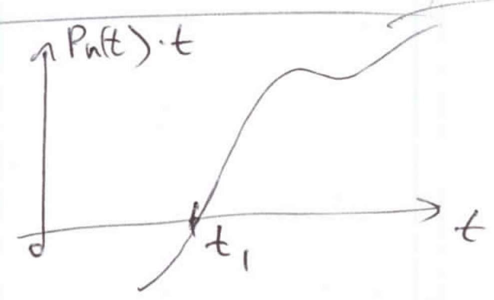
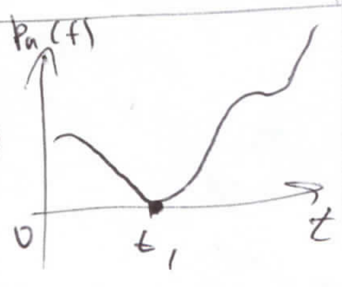
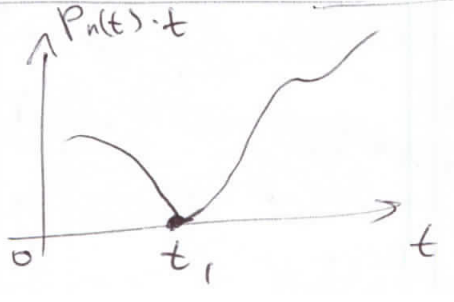


$t_2 > t_1$ - противоречие и t_1 не макс. корень.

$$P_{n+1}(t) = P_n(t)\cdot t + t_1 - \sqrt{t_1}$$

Проанализируем макс корень $P_{n+1}(t)$:

Как изменится график $P_n(t)$ при умножении на t. Монотонность т.к. $f(t)=t$ монотонно возрастает, монотонность $P_n(t)\cdot t$ не изменится. Так же т.к. $t>0$ все точки, которые были над осью Ot так и останутся над ней, а все точки, которые были под Ot останутся под ней.

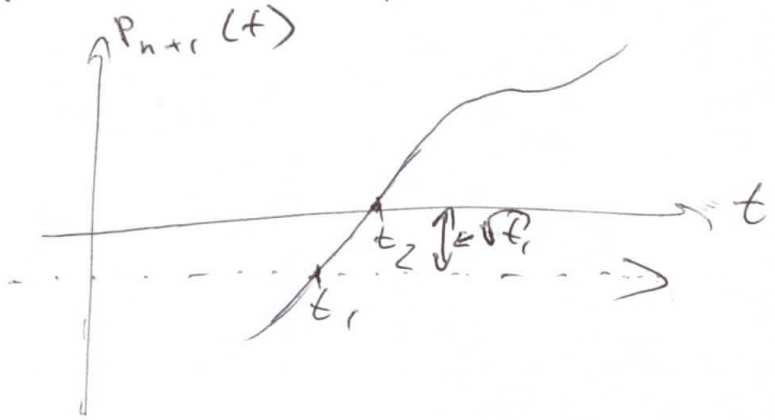
Случай	График $P_n(t)$	График $P_n(t)\cdot t$
1 ($P_n'(t_1)>0$)		
2 ($P_n'(t_1)=0$)		

Чистовик

В-21
лист 3

Т.е. можем утверждать, что для всех $t > t_1$, $P_n(t) \cdot t > 0$ и ~~$P_n t$~~ $\lim\limits_{t \to +\infty} P_n(t) \cdot t = +\infty$.

При ~~пр~~ вычитании $\sqrt{t_1}$ мы поднимаем ось Ot на $\sqrt{t_1}$ и максимальный корень t_2 будет самой правой точки пересечения $P_{n+1}(t)$ с графиком.



Т.е. с каждым разом t_2 будет расти.

И при $n \to \infty$, $t_2 \to \infty$ т.к. график не имеет асимптот.

$\Rightarrow$ найдётся N, что макс корень t_N многочлена $P_N(t)$ будет более 2 т.к $t_N > 1$.

$t_N > 1 \quad t_{N+1} > t_N \Rightarrow -\sqrt{t_{N+1}} < -\sqrt{t_N}$

$a_{N+1} < a_N$ и последовательность монотонно убывает. ЧТД

(Чистовик)

В-21

лист 1

6	7	8	9	10	Σ
7	7.	7	1	X	22

10.6

Данные последовательные числа:

$n, n+1, n+2, n+3 \quad n>100$

Возможные суммы, которые можем получить, выбрав 3 из них:

$3n+3 = 3(n+1)$

$3n+4 = 3(n+1)+1$

$3n+5 = 3(n+1)+2$

$3n+6 = 3(n+2)$

Нас интересуют суммы $3(n+1)$ и $3(n+2)$.

Т.к. $(n+1)$ и $(n+2)$ - последовательные числа одно из них будет делиться на 2.

Два случая:

1) $(n+1):2$, $3n+3 = 3\cdot(2\cdot k)$, $k \in \mathbb{N}$, $k>50$

2) $(n+2):2$, $3n+6 = 3\cdot(2\cdot m)$, $m \in \mathbb{N}$, $p>50$

Нам нужно представить сумму в виде произведения 3х различных натуральных чисел больших 1.

$3 \in \mathbb{N}, 3>1$, $2 \in \mathbb{N}, 2>1$, $k \in \mathbb{N}, k>1$, $p \in \mathbb{N}, p>1$. $3 \neq 2$ $2 \neq k$ т.к. $k>50$, $3 \neq k$ т.к. $k>50$ $2 \neq p$ т.к. $p>50$, $3 \neq p$ т.к. $p>50$.

Т.е. для каждого из случаев условие выпол-

шением. Т.е. такая сумма всегда существует. ~~ЧТД~~
ЧТД

10.7 Т.к. для любого n $x_n > 0$ (т.к. $b > a$) (и при извлечении корня b остаётся больше)

Если $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$, то $x_n > x_{n+1}$ и последовательность убывает. (домножили первое на x_{n+1})

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)}{2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)} = \frac{\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)}{2\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}}{2}$$

т.к. $b > 1$, $\sqrt[2^{n+1}]{b} > 1$

т.к. $a > 1$, $\sqrt[2^{n+1}]{a} > 1$

$$\Rightarrow \sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a} > 2 \text{ и } \frac{\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}}{2} > 1 \Rightarrow$$

$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$ и последовательность убывает. ЧТД

10.9 При разбиении n-угольника диагоналями на треугольники найдётся хотя-бы одна вершина, которая не принадлежит ни одной из диагоналей.
Будем перебирать все точки и, говоря, что эта точка не ~~входит в~~ принадлежит ни одной из диагоналей.

1) если $n = 2(k+1)$ $k \in N$;

1 балл

p_0 — не входит в ~~разбиение~~ диагонали, значит идём по часовой и против часовой от p_0. a_1 и b_1 принадлежат диагоналям, чтобы получался треугольник.

Тогда далее должна существовать диагональ b_1a_2 или a_1b_2.
Аналогично доходим до того, что точки $a_1 \dots a_k$ и $b_1 \dots b_k$ входят в ~~разбиение~~ диагонали и остаётся точка p, которая не входит. Так же т.к. диагональ соединяет

В-21
лист 2

Шектовик

разноцветные точки, точки $a_1 \ldots a_k$ одинакового цвета, точки $b_1 \ldots b_k$ одинакового цвета и цвета множеств $a_1 \ldots a_k$ и $b_1 \ldots b_k$ разные.

② $n = 2(k+1)+1$, $k \in N$

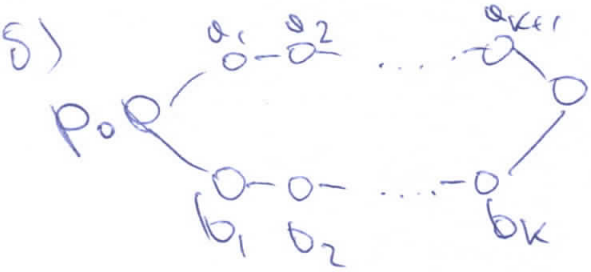
Тут получается два случая:

Аналогично 1 случаю рассуждая приходим к :

а)

→ ~~Сверху~~ В мн-ве $\{a_m\}$ k точек, а в $\{b_m\}$ $(k+1)$ точек.

б)



→ В мн-ве $\{a_m\}$ $(k+1)$ точек, и в мн-ве $\{b_m\}$ k точек.

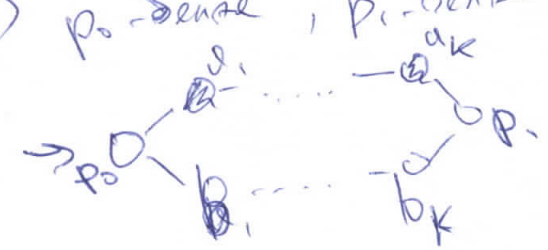
Аналогично с 1м случаем в мн-ве $\{a_m\}$ точки одинакового цвета, в мн-ве $\{b_m\}$ тоже одинакового, но цвета ~~точек~~ $\{a_m\}$ и $\{b_m\}$ различны.

Узнаем количество раскрасок:

① $n = 2(k+1)$ $k \in N$

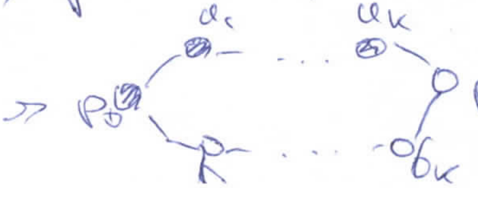
Переберём 8 вариантов:

а) p_0 - белая, p_1 - белая, $\{a_m\}$ - чёрн $\{b_m\}$ - бел.



Но эта раскраска может подойти, если мы будем смотреть из точки p_1, поэтому при суммировании домножим ее на $d_1 = \frac{1}{2}$, чтобы она сочиталась с собой же при рассмотрении от точки p_1

б) p_0 - чёрн, p_1 - бел, $\{a_m\}$ - чёрн, $\{b_m\}$ - бел.



Эта раскраска так же подходит при рассмотрении из ~~точки a~~ точек a_k, p_1, b $\Rightarrow d_2 = \frac{1}{4}$

т.к. эта раскраска при переборе войдёт ровно 4 раза. Путём аналогичных рассуждений составим таблицу всех вариантов:

(б - белой, ч - чёрной)

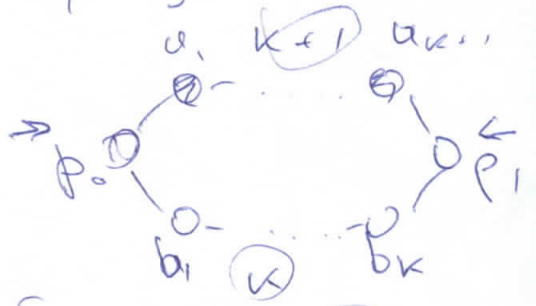
N	p_0	p_1	$\{a_m\}$	$\{b_m\}$	d_q
1	б	б	ч	б	1/2
2	ч	б	ч	б	1/4
3	б	ч	ч	б	1/4
4	ч	ч	ч	б	1/2
5	б	б	б	ч	1/2
6	ч	б	б	ч	1/4
7	б	ч	б	ч	1/4
8	ч	ч	б	ч	1/2

Тогда всего раскрасок: $N_{p_1} = n\cdot\sum_{q=1}^{8} d_q = 3n$.

при $n = 2(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$

② Получаем 16 случаев:

а) $k+1$ точек в мн-ве $\{a_m\}$, p_0 - бел, p_1 - бел, $\{a_m\}$ черн, $\{b_m\}$ бел.



$d = \frac{1}{2}$ т.к. двигаем разм. от точки p_1

б) $k+1$ точек в мн-ве $\{a_m\}$, p_0 - черн, p_1 - бел, $\{a_m\}$ черн, $\{b_m\}$ бел.

$d = \frac{1}{4}$ т.к. можно получить раскраску смотря из p_1, a_{k+1}, b_1

т.е. количество вариантов это та же сумма $\sum d_q$ только умноженная на 2 т.к. у нас может быть $(k+1)$ точек либо в $\{a_m\}$, либо в $\{b_m\}$. $N_{p_2} = 2n\sum_{q=1}^{8} d_q = 6n$.

при $n=2(k-1)+1$, $k \in \mathbb{N}$. (чистовик) (В-21) (лист 3)

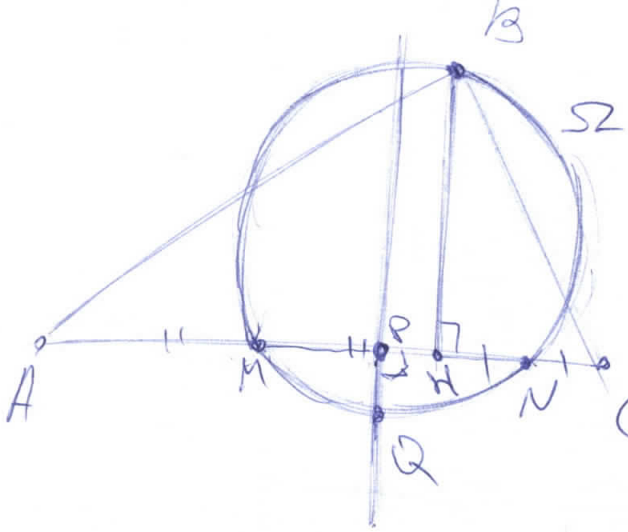
Ответ: если n - чётное, то $N_p = 3n$
если n - нечётн, то $N_p = 6n$.

10,8

Дано: остроугольн $\triangle ABC$, BH - высота, M и N - середины AH и CH соответственно. BB' диаметр окружности Ω описанной около $\triangle BMN$

Док-ть: $AB' = CB'$

Док-во:



Проведём серединный перпендикуляр PQ к отрезку AC. $AP = PC$. Q и B лежат по разные стороны от прямой AC.

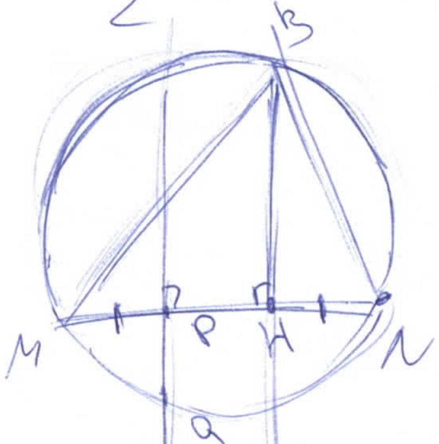
Докажем, что дуга BQ равна π радиан и BQ является диаметром окр-ти Ω.

$AP = \frac{AC}{2} = \frac{AH + HC}{2}$. $AM = \frac{AH}{2}$. $MP = AP - AM$

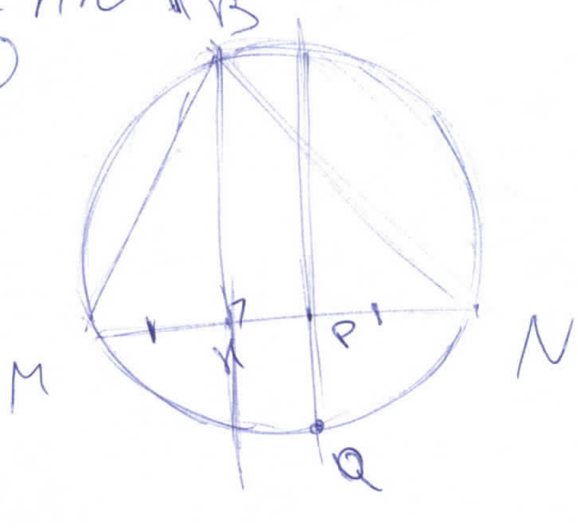
$= \frac{AH + HC}{2} - \frac{AH}{2} = \frac{HC}{2}$

$HN = \frac{HC}{2}$ $\Rightarrow$ $MP = HN$ (и $MH = PN$ т.к. $MH = MN - HN$, $PN = MN - MP$

1

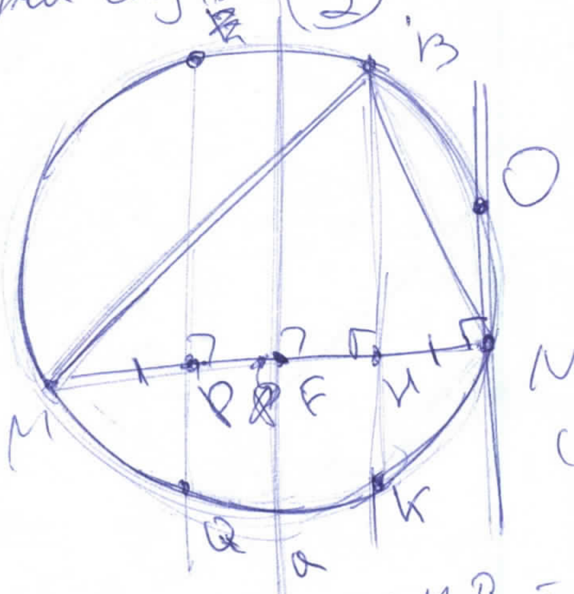


2



Есть два случая 1) P между M и H ($MP = HN$).
2) P между N и H ($MH = PN$)

Док-ва для них аналогичные, так что приведу для случая (1)



Проводём перпендикуляр к MN через точку N.
$NO \perp MN$. O лежит на окр-ти Ω. $O \neq N$

(дуга) $\cap MO = \pi$ т.к $\angle MNO = \frac{\pi}{2}$
$\angle MNO$ – вписанный

Докажем, что $\cap MQ = \cap BO$
Продолжим BH, K – точка пересеч прямой BH и окр Ω. $K \neq B$ $\cap KN = \cap BO$ т.к. $BK \parallel NO$ т.к $BK \perp MN$ и $NO \perp MN$.

~~E – точка пересеч PQ и Ω~~ $E \neq Q$
Воспользуемся ~~симметрией~~ симметрией!
Ось симметрии a: $a \perp MN$ и проходит через середину MN. a делит окр Ω на две симметричные части т.к. a – серединный перпендикуляр хорды MN.

Точки M и N – симметричны т.к. a проходит через середину MN и P и H тоже симметричны т.к. $a \perp PH$ и $PF = FH$ т.к. $PF = MF - MP$, $FH = FN - NH$ и $MP = NH$ и $FN = FM$.
(~~Где F~~ $F = a \cap MN$.)

Отрезки PQ и BK тоже симметричны т.к. $PQ \parallel a \parallel BH$ и $PF = FH$ (расстояние от a до PQ и BH) ($PQ \perp MN$, $a \perp MN$, $BH \perp MN$)

$\Rightarrow$ отрезки MQ и KN тоже симметричны и равны. $\Rightarrow$
$\cap MQ = \cap KN = \cap BO \Rightarrow \cap BQ = \cap MO + \cap BO - \cap MQ = \pi$

черновик | В-21, лист 4

$\angle B_1 B Q = \pi \Rightarrow BQ$ — диаметр.
диаметр может быть только один $\Rightarrow B_1$ совпадает с Q и лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC
$\Rightarrow AB_1 = B_1C$ ЧТД